1/a- Justifier l'existance de f.

b- Montrer qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$\forall t \in IR\backslash\{-1;1\}; \frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}.$$

c- En déduire que $\forall x \in]-1;1[; f(x) = \frac{1}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$

2/ Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

3/a- Montrer que $\forall x \in IR_+^*, \forall k \in IN^*; Logx \leq \frac{x}{k} - 1 + Logk$

b- En déduire que $\forall k \in IN^*; \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} Logxdx \leq Logk$ et par suite

$$\forall n \in IN^*; \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} Logxdx \leq Log(n!)$$

c- Mq $\forall n \in IN^*; Log(n!) \geq \left(n+\frac{1}{2}\right).Log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}Log2.$

4/ Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par $u_n = Log(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right).Logn + n.$

a- Montrer que $\forall n \in IN^*; u_n \geq \frac{1}{2}Log2.$

b- Vérifier que $\forall n \in IN^*; u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right).$

c- En déduire que (u_n) est convergente.

II/ Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ et

$\forall n \in IN^*; v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$

1/ Calculer v_0.

2/a- Le plan étant muni du repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; déterminer l'ensemble des points M(x,y) tels que $y^2 - x(1-x) = 0$.

b- En déduire que $v_1 = \frac{\pi}{8}$.

3/a) Montrer que (v_n) est décroissante .

b) En déduire qu'elle est convergente

4/a- Prouver, a l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in IN; v_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}v_n.$$

b- En déduire que $\forall n \in IN; \frac{n+2}{n+5} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$

5/a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN; v_n.v_{n+1} = \frac{2\pi}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

b) En faisant apparaitre, dans l'expression précédente le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}.v_n = \sqrt{2\pi}$.

6/ Montrer que $\forall p \in IN; v_{2p} = \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}.\frac{(2^p.p!)^2}{(2p)!}$.